



زیربرنامه KeLB\_MainImplicit\_f

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان:** | **مرتضی نامور**  **حجت دهقان‌درست و فرزین چایچی‌زاده** |  |
| **تهیه کننده مستند:** | **مرتضی نامور حجت دهقان‌درست و فرزین چایچی‌زاده** | |
| **تاریخ تنظیم سند:** | **09 / 02 /97** | |
| **تایید کنندگان:** |  | |
| **شماره سند:** | **MC2F101F1** | |
| **زبان برنامه نویسی:** | **Fortran 90** | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **KeLB\_MainImplicit\_f(Dim,X,Y,Z,NX,NY,NZ,NC,NF,NF1,NF2,NFW1,NFW2,NFI1,NFI2,NFO1,NFO2,NFS1,NFS2,NFF1,NFF2,&**  **NP,IDS,FaceType,INW,XC,YC,ZC,DWAL,DA,DT,Vol,MR,Wb,WNP1,Mu,P,&**  **GM,DUY,InonzeroCell,InonzeroFace,NnonzeroCell,WTNP1,Mut)** | | | |
| **Dimension** | **Type** | **Description** | **Intent** |
|  |  |  | **Input** |
|  | Integer | Maximum **Dim**ension of Arrays | Dim |
| (1:Dim) | Real(8) | Coordinate of Points | X,Y, Z |
| (1:Dim) | Real(8) | Normal Vectors of each Face | NX,NY,NZ |
|  | Integer | **N**umber of Existing **C**ells | NC |
|  | Integer | **N**umber of **F**aces Constructing Computational Grid | NF |
|  | Integer | Index of 1st and last Non-Boundary **F**aces | NF1,NF2 |
|  | Integer | Index of 1st **F**aces on **W**all Boundary | NFW1,NFW2 |
|  | Integer | Index of 1st and last **F**aces on **I**nter **F**ace Boundary | NFI1,NFI2 |
|  | Integer | Index of 1st and last **F**aces on **O**utflow Boundary | NFO1,NFO2 |
|  | Integer | Index of 1st and last **F**aces on **S**ymmetry Boundary | NFS1,NFS2 |
|  | Integer | Index of 1st and last **F**aces on **F**ar **F**ield Boundary | NFF1,NFF2 |
|  | Integer | **N**umber of Existing **P**oints | NP |
| (1:6,1:Dim) | Integer | **I**nformation of Grid **D**ata **S**tructure | IDS |
| (1:Dim) | Integer | Number of Edges Belong to Each Face | FaceType |
| (1:Dim) | Integer | Index of Nearest Wall | INW |
| (1:Dim) | Real(8) | Coordinate of Element’s Center | Xc,Yc,Zc |
| (1:Dim) | Real(8) | Distance to Nearest Wall | DWAL |
| (1:Dim) | Real(8) | Length of each Face | DA |
| (1:Dim) | Real(8) | Explicit Time Step | DT |
| (1:Dim) | Real(8) | **Vol**ume of cells | Vol |
|  | Real(8) | **M**uch Number over **R**eynolds Number of **inf**inite Flow | MR |
| (1:6,1:Dim) | Real(8) | Conservative Values and Pressure at **B**oundary Faces | WB |
| (1:5,1:Dim) | Real(8) | Conservative Values at (N+1)th Time Step | WNP1 |
| (1:Dim) | Real(8) | Molecular Viscosity of each Cell | Mu |
| (1:Dim) | Real(8) | **P**ressure | P |
|  | Real(8) | **G**ama Constant (Specific Heat Ratio) | GM |
| (1:Dim) | Real(8) | **Velocity Gradiant** | DUY |
| (1:10,1:Dim) | Real(8) | **I**ndex of **non-zero** element’s **cell** | InonzeroCell |
| (1:10,1:Dim) | Real(8) | **I**ndex of **non-zero** element’s **Face** | InonzeroFace |
| (1:Dim) | Real(8) | **N**umber of **non-zero** **Cells** | NnonzeroCell |
|  |  |  | **Output** |
| (1:Dim) | Real(8) | Turbulence Viscosity (Eddy Viscosity) | Mut |
| (1:2,1:Dim) | Real(8) | Turbulence Variables | WTNP1 |

* 1. وظایف

این زیربرنامه، زیربرنامه اصلی مدل آشفتگی  می­باشد که سایر زیربرنامه­ها در آن فراخوانده می­شوند و درنهایت نیز، لزجت گردابه­ای و بخش نوسانی سرعت یعنی  با روش ضمنی محاسبه می­گردد.

* 1. توضیحات و تئوری­ها

مدل آشفتگی  معروف­ترین و پرکاربردترین مدل آشفتگی می­باشد و تاکنون نیز نسخه­های متعدد و متنوعی از این مدل آشفتگی ارائه شده است[1]. مدل­های آشفتگی  برای طیف وسیعی از مسائل مهندسی، نتایج قابل قبولی ارائه می­دهند و برای شبیه­سازی جریان­های آیرودینامیکی نیز مدل مناسبی می­باشند. در تمامی مدل­های  دو معادله دیفرانسیل جداگانه به ترتیب برای انرژی جنبشی آشفتگی[[1]](#footnote-1)  و نرخ اضمحلال انرژی جنبشی آشفتگی[[2]](#footnote-2)  نوشته می­شود. این دو متغیر به صورت زیر تعریف می­شوند[2]:

1. 

با استفاده از این تعاریف، می­توان معادله دیفرانسیل دقیق حاکم بر  و  را به دست آورد. اما این معادلات دقیق، حاوی ترم­های ناشناخته و غیرقابل اندازه­گیری فراوانی هستند که استفاده از آنها را در عمل و در مسائل مهندسی غیرممکن می­کند. اما در سال 1974، لاندر[[3]](#footnote-3) و اسپالدینگ[[4]](#footnote-4) براساس فیزیک آشفتگی، موفق شدند با ساده­سازی معادلات دقیق حاکم بر  و ، شکل کاربردی مدل  را ارئه دهند که توانایی شبیه­سازی طیف وسیعی از جریان­های آشفته را دارا بود[3]. مدل ارائه شده توسط لاندر و اسپالدینگ بعدها به مدل  معروف شد. به صورت خلاصه می توان مزایای کلی مدل­های  را به صورت زیر بیان نمود [2]:

* سادگی و قابلیت شبیه­سازی طیف وسیعی از جریان­ها
* عدم حساسیت نتایج به مقادیر جریان آزاد

اما مدل­های  در حالت کلی دارای نقایصی نیز می­باشند که از جمله آنها می­توان به موارد زیر اشاره کرد:

* دقت پایین در شبیه­سازی جریان­های چرخشی[[5]](#footnote-5) و جریان­های همراه با جدایش[[6]](#footnote-6)
* عملکرد نامناسب در نواحی با گرادیان فشار معکوس زیاد[[7]](#footnote-7)
* عملکرد نامناسب در لایه­های مرزی منحنی شکل[[8]](#footnote-8)
* دقت پایین در جریان­های داخلی با مقطع غیردایروی

برای اصلاح این نقایص تاکنون تلاش­های زیادی صورت گرفته که این تلاش­ها منجر به ظهور نسخه­های جدیدتر و کاربردی­تر از مدل  شده است. هدف هر یک از این نسخه­ها بهبود توانایی­های مدل  در پیش بینی خواص جریان آشفته بوده است. البته لازم به ذکر است که بسیاری از نسخه­های مختلف این مدل به منظور استفاده در کاربردهای خاص ایجاد شده­اند و از فرضیات خاصی استفاده می­نمایند که نمی­توان برای کاربردهای عمومی از آنها استفاده نمود.

* + 1. معادلات حاکم

یکی از مشکلات مدل k-Epsilon استاندارد ناپایداری نزدیک دیواره می‌باشد. برای رفع این مشکل و سازگاری مدل‌ k-Epsilon استاندارد نزدیک دیوار، چندین اصلاح سازی معرفی شده است. نتیجه این فرموله‌بندی تحت عنوان معادلات k-Epsilon با عدد رینولدز پایین شناخته می‌شوند. اولین مدل k-Epsilon با عدد رینولدز پایین توسط جونز و لاندر معرفی شد و سپس در چندین تحقیق دیگر اصلاحات دیگری ارائه شد. ابتدایی ترین تصحیح ارائه شده توسط جونز و لاندر شامل عدد رینولدز آشفتگی وابسته به توابع  ، و  در روابط (3)و (4) می‌باشد. علاوه بر آنها ترم‌های دیگر  و  به معادلات برای فرآیندهای اتلاف ناشی از ناهمگنی اضافه می‌شوند. بنابراین معادلات k-Epsilon با عدد رینولدز پایین بشکل زیر نوشته می‌شوند[4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

که در آن ویسکوزیته آشفتگی به طریق زیر محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و در معادلات قبل نمایانگر تولیدآشفتگی می‌باشد و بشکل زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ثوابت موجود در این معادلات به صورت زیر تعریف شده­اند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همانطور که گفته شد، مدل یک مدل رینولدز پایین می­باشد و از تابع دیوار استفاده نمی­کند. در این مدل، در نزدیکی دیوار از توابع میرایی[[9]](#footnote-9) ارائه شده توسط مینر[5] استفاده می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین  نیز به صورت زیر محاسبه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که ، تنش برشی بر روی دیوار می­باشد و  نیز جهت عمود بر دیوار می­باشد. لازم به ذکر است که با توجه به رینولدز پایین بودن این مدل، شبکه استفاده شده در نزدیکی دیوار می­بایست به اندازه کافی ریز باشد.

در مدل k-Epsilon استاندارد ضرائب  ، و  واحد می‌باشند. این فرض برای زیر لایه آرام صحیح نمی‌باشد و توابع مناسبی برای ارضای شرایط فیزیکی نزدیک دیوار نیستند. لم و برمهوست [6] با اصلاح این توابع، مدل k-Epsilon استاندارد را برای جریان‌های نزدیک دیوار برای اعداد رینولدز بالا توسعه دادند. در این قسمت توسعه هریک از این توابع ارائه می‌شود:

* + - 1. توسعه تابع 

کاربردهای موفق زیادی در اعداد رینولدز بالا با استفاده از مدل k-Epsilon به همراه توابع دیوار برای جریان‌های روی دیوار با تابع  انجام شده است. در جریان‌های روی دیوار برای نواحی دور از دیوار اثرات لزجت در مقایسه با لزجت آشفتگی ناچیز می‌باشند. این در حالی است که در نواحی خیلی نزدیک دیوار اثرات لزجت سیال دارای اهمیت بالایی هستند و خواص بطور متناوب تغییر می‌کند و ****از حالت واحد دور می‌شود. معادله‌ای برای ****همراه با اثرات دیوار به شکل زیر معرفی شد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در کار جونز و لاندر همانطور که گفته شد مقادیر و بترتیب 5/2 و 02/0 می‌باشند. در کار هافمن مقدار، 75/1 می‌باشد. در هر حال ****و  تابعی منحصر به فرد از  می‌باشند. در این معادله ****در حضور دیوار تنها از  تاثیر می‌پذیرد.

چن [7] معادله‌ی دیگری را برای **** پیشنهاد کرد بطوری که در این معادله **** بطور مستقیم به فاصله عمودی دیوار وابسته می‌باشد. این معادله به شکل زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این معادله می‌باشد.

معادله‌ی دیگری توسط هسید و پوره[8] پیشنهاد شد. این معادله به شکل زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این معادله در نظر گرفته می‌شود.

در همه معادلات ارائه شده بالا ****و  تنها تابعی از  می‌باشند. فرمول‌های بالا برای حالت‌های گفته شده، به همراه مدل k-Epsilon نتایج خوبی را ارائه می‌دهند، ولی در هیچ یک از این معادلات بالا، **** نمی‌تواند با شرایط مرزی فیزیکی صحیح برای استفاده شود.

روی دیوار دارای مقدار محدودی می‌باشد و می‌باشد. تغییرات و نزدیک دیوار امکان بسط، توسط بسط تیلور را دارد و آنها را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن *p* ها و *q* ها توابعی از فواصل مسیرهای جریان می‌باشند.

در فواصل خیلی کم از دیوار اگر از معادلات (9 تا11) استفاده شود، با ، و  متناسب خواهد بود. از آنجا که یک معادله متغیر مورد نیاز می‌باشد بنابراین می‌توان با استفاده از مدل یک معادله‌ای هسید- پوره که توسط گیبسون و همکاران[9] اعمال شد معادلاتی بشکل زیر برای و بدست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

رفتار  از متغیر مستقل مجزا می‌باشد. معادلات (13و14) می‌توانند ترکیب شده و بعد از حذف ، بیانی برای بر حسب ،،و بدست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

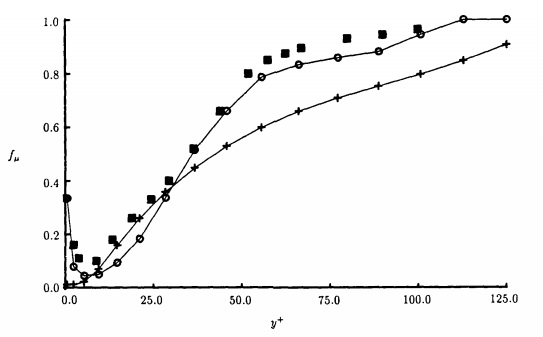
با قرار دادن مقدار  می‌توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

درنهایت میتوان از رابطه‌ی ساده شده (17) که معادله کلی می‌باشد برای اعداد رینولدز بالا استفاده می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن تابعی از ، وتابعی از در نزدیکی دیوار می‌باشد. اکنون در حضور دیوار بطور مستقیم و غیرمستقیم از دیوار تاثیر می‌پذیرد. برای آشفتگی‌های بزرگ، در فواصل دور از دیوار به سمت یک تمایل دارد اما در نزدیکی دیوار به وابسته می‌ماند. مقادیر ثابت و با آزمایش و خطا مشخص می‌شود.

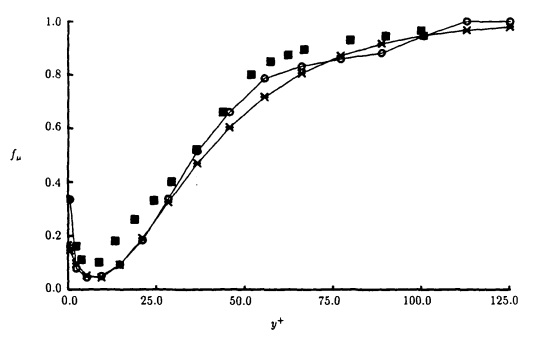


1. مقایسه توابع دمپ دیواره().■ :نتایج آزمایشگاهی پیتل و همکاران. 🌕 محاسبه شده از داده های HHL. + محاسبه شده از مدل لم برمهوست معادله(15-2).

شکل (1) نمودار  را نشان می دهد. طبق محاسبات انجام شده با DNS،  در  تابع دارای مقدار مینیمم 04/0 می باشد و با دور شدن از دیوار این مقدار به سمت یک میل می کند. در مدل لم برمهوست با معادله (17) در نزدیکی دیواره و همچنین  تابع  از نتایج DNS دور می شود. برای رفع این مشکل از تابع دمپ اصلاح شده ون درست به شکل زیر استفاده می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این معادله با توجه به نتایج در  و  و  نتایج در تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی می باشد. در شکل(2) تابع  محاسبه شده توسط معادله(18) با نتایج آزمایشگاهی و DNS مقایسه شده است و می توان تطابق خوبی را مشاهده کرد[5].



1. مقایسه توابع دمپ دیواره().■ :نتایج آزمایشگاهی پیتل و همکاران. 🌕 محاسبه شده از داده های HHL. + محاسبه شده از مدل لم برمهوست اصلاح شده توسط معادله(18).
   * + 1. توسعه تابع 

در محاسبات مربوط به اعداد رینولدز بالا این مدل همراه با توابع دیوار مقدار تقریبا برابر واحد می‌باشد. در ناحیه نزدیک دیوار مقدار با افزایش نرخ اتلاف دارای مقادیر بزرگی می‌باشد. اگر ثابت نگه داشته شود و مقدار آن برابر واحد فرض شود، می‌بایست ترمهای اتلاف به معادله انتقال برای پیش بینی یک میدان منطقی اضافه گردد. این ترم به شکل زیر پیشنهاد شد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این معادله همانطور که مشاهده می‌شود، تنها تابعی از می‌باشد. ثابت می‌بایست دارای یک مقدار کوچک باشد تا در زمانی که سطح آشفتگی بالا است و به طبع تقریبا برابر یک شود. روی دیوار می‌بایست کوچک و محدود باشد و دارای مقدار بزرگی است. مقدار از آزمایش و خطا بدست می‌آید.

* + - 1. توسعه تابع 

در اعداد رینولدز پایین در مدل k-Epsilon مقدار ****به صورت زیر فرض می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* + 1. تعمیم مدل k-Epsilon برای جریان تراکم‌پذیر

برای تعمیم معادلات و اعمال تصحیحات مربوط به تراکم‌پذیری جریان به معادلات ابتدا عدد ماخ آشفته بصورت زیر تعریف می‌شود[4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن بیانگر سرعت صوت می‌باشد.

اینک معادلات مدل k-Epsilon همراه با تصحیحات مربوط به تراکم‌پذیری جریان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ترم نشان‌دهنده سهم ناشی از اتلاف تراکم‌پذیری می‌باشد، و ترم نشان دهنده ترم dilatation فشار می‌باشد. این دو ترم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که ضرائب بدست آمده موجود در این دو معادله توسط DNS به شرح زیر می‌باشند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* + 1. تصحیح انحنا در مدل های آشفتگی

یکی از ضعف های مدلهای اشفتگی حساسیت آنها به انحنا سطح و خطوط جریان انحنادار می باشد. بنابراین در شبیه سازی جریان های همراه با انحنا، اثر انحنا می بایست روی کمیت های آشفتگی و توابع آنها اعمال شود. براساس کارهای شور و اسپالارت اصلاحاتی روی ترم تولید آشفتگی در مدل های توربولانسی استاندارد اعمال شده است[10]. معادلات مربوط به این تصحیح در مستند مربوط به ترم تولید آشفتگی ارائه شده است.

* 1. بی‌بعد سازی معادلات مدل k-Epsilon اصلاح شده(k-Epsilon LB)

یکی از ملاحظات عددی، بی‌بعدسازی آنها می‌باشد. بطور خلاصه بی‌بعد سازی باعث می‌شود که بخش‌های مختلف معادلات هم مرتبه شده و در نتیجه خطاهای گرد کردن کاهش پیدا کند. پارامترهای مختلفی برای بی‌بعدساری معادلات حاکم بر جریان استفاده می‌گردد. از آنجا که معادلات حاکم بصورت بی‌بعد شده در این شبیه‌سازی استفاده شده است، بنابراین نیاز می‌باشد که معادلات مدل توربولانسی نیز به حالت بی‌بعد استفاده شود. در اینجا از پارامترهای زیر جهت بی‌بعد سازی معادلات استفاده می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در پارامترهای بالا نشان دهنده سرعت صوت می‌باشد.

در روابط بالا پارامترهای دار معرف کمیت‌های بعددار و زیرنویس بیانگر کمیت‌های جریان آزاد می‌باشد. همچنین مقدار پارامتر می‌تواند هر طول دلخواهی باشد که کاربر باید آن را تعیین نماید ولی در مسائل مربوط به ایرفویل، مقدار آن را برابر طول ایرفویل در نظر می‌گیرند.

معادلات مدل k-Epsilon همراه با تصحیحات مربوط به تراکم‌پذیری جریان را در حالت بعددار می‌توان به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

در معادلات بالا و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با استفاده از کمیت‌های بی بعد گفته شده می‌توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

مقادیر و در مدل لم- برمهوست برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند.

ابتدا به با استفاده از پارامترهای داده شده، به بی‌بعد سازی معادله(28) می‌پردازیم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

معادله(30) شکل بی‌بعد شده معادله می‌باشد.

و معادله (29) در حالت بی‌بعد شده به شکل زیر در می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

این معادله شکل بی‌بعد شده معادله می‌باشد. در معادلات بالا داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با تعریف پارامترهای زیر می‌توان معادلات (18 و 19) را بشکل ساده‌تری نوشت.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در نهایت معادلات (30 و 31) را می‌توان بشکل زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

که در این معادلات داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  تانسور نرخ کرنش متوسط بی بعد می‌باشد و بصورت زیر تعریف میشود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در معادله (33)کمیت بی بعد شده می‌باشد و به شکل زیر بی بعد می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

با تقسیم طرفین معادله به به معادله بی بعد شده زیر می‌رسیم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن عدد ماخ توربولانسی می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن سرعت صوت می‌باشد.

در محاسبه این ضرائب در مدل لم- برمهوست از عدد رینولدز توربولانسی استفاده می‌شود که بصورت زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

این عدد رینولدز را می‌توان بر حسب کمیت‌های بی‌بعد نوشت که بصورت زیر در خواهد آمد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. شرایط مرزی

اعمال شرایط مرزی مناسب در مدل­های آشفتگی نقشی اساسی در شبیه­سازی صحیح و دقیق جریان­های آشفته دارد. رمزی[[10]](#footnote-10) و اسپالارت[[11]](#footnote-11) نشان داده­اند که انتخاب شرایط مرزی نادرست در مدل­های آشفتگی می­تواند منجر به نتایج غیرفیزیکی و نادرست و یا حتی ناپایداری حل­گر شود [11]. لذا اعمال شرایط مرزی، یکی از مهمترین مراحل در شبیه­سازی جریان آشفته می­باشد. شرایط مرزی متغیرهای آشفتگی در مدل  برای جریان­های داخلی[[12]](#footnote-12) و خارجی[[13]](#footnote-13) دارای تفاوت­هایی می­باشد که در ادامه به آنها پرداخته می­شود:

* + 1. شرط مرزی دیوار

بر روی دیواره در جریان­های داخلی و خارجی مقادیر زیر به عنوان شرایط مرزی در نظر گرفته می شوند[5]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* + 1. شرط مرزی ورودی

در ورودی جریان­های داخلی شرایط مرزی به نحو زیر می باشد[2]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در جریان­های خارجی نیز شرایط مرزی مطابق رابطه زیر پیشنهاد شده است [13]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* + 1. شرط مرزی خروجی

در خروجی جریان­های داخلی و خارجی، معمولا مشتق اول تمامی متغیرها، عمود بر مرز برابر صفر قرار داده می شود [2].

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. شرایط اولیه

شرایط اولیه متغیرهای آشفتگی در اکثر مسائل، برابر شرایط مرزی ورودی قرار داده می­شود [2]، بنابراین برای جریان­های داخلی داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و به نحو مشابه برای جریان­های خارجی، شرط اولیه مطابق زیر محاسبه می گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. شکل ماتریسی معادلات آشفتگی

جهت حل عددی و گسسته­سازی معادلات آشفتگی، راحت­تر است که این معادلات را به صورت ماتریسی بنویسم. به این منظور معادلات بی­بعد شده ‏(33) و ‏(34) به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این رابطه  و و ، بیانگر بخش­های جابجایی[[14]](#footnote-14) می­باشند،  و  و  بیانگر بخش­های پخش­شوندگی[[15]](#footnote-15) و  ترم چشمه[[16]](#footnote-16) می­باشد. هرکدام از این بخش­ها به صورت زیر می­باشند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. نحوه گسسته سازی حجم محدود معادلات

در روش حجم محدود، اولین قدم در گسسته­سازی معادلات، انتگرال­گیری از شکل بقایی معادلات بر روی یک حجم کنترل می­باشد. برای این کار معادله ‏(47) را در نظر بگیرید. با انتگرال گیری از این معادله بر روی یک سلول محاسباتی خواهیم داشت [14]:



|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در ترم (1)، مقدار  بر روی یک حجم کنترل ثابت فرض می شود در نتیجه می توان ترم (1) را به صورت زیر ساده کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در این رابطه  حجم حجم کنترل می­باشد.

برای ترم (2) و (3)، از قضیه گوس استفاده می شود. مطابق قضیه گوس[[17]](#footnote-17)، می­توان انتگرال روی سطح را به انتگرال روی مرزها تبدیل نمود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در این رابطه، بردار عمود بر مرز حجم کنترل می باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و نیز مساحت قطاع­های تشکیل­دهنده مرزهای حجم کنترل می­باشد. مطابق شکل زیر:

بنابراین با تعریف ، می­توان ترم (2) را به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این رابطه،  تعداد اضلاع تشکیل دهنده هر یک از سلول های محاسباتی می­باشد.

ترم چشمه را نیز می­توان به صورت زیر ساده کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

بنابراین درنهایت می­توان معادله ‏(47) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

نحوه گسسته­سازی مکانی بخش جابجایی و بخش پخش­شوندگی در زیربرنامه­های مربوطه به نحو مبسوط توضیح داده خواهد شد.

* 1. گسسته سازی زمانی

معادله ‏(55) را می توان به فرم یک معادله دیفرانسیل معمولی[[18]](#footnote-18) به صورت زیر بازنویسی کرد:

1. 

که در آن داریم:



جهت بدست آوردن پاسخ حالت دائم باید این معادلات دیفرانسیل نسبت به زمان انتگرال گیری شود. در اینجا از روش ضمنی اویلر استفاده خواهد شد. در روش اویلر انتگرال زمانی بخش باقیمانده () با مقدار آن در زمان آینده تقریب زده می شود. در نتیجه انتگرال بخش باقی مانده به صورت ذیل محاسبه می‌گردد.

1. 

با انتگرال گیری زمانی از معادله 44 و در نظر گرفتن تقریب اویلر (معادله 45) خواهیم داشت:

1. 

با تحلیل فوریه این مساله می توان نشان داد که تقریب بالا بی قید پایدار است. یعنی بدون وابستگی به اندازه گام زمانی همیشه جواب پایدار است[[19]](#footnote-19). با حل دستگاه عددی گسسته شده مکانی و زمانی می‌توان به پاسخ نهایی رسید.

شایان ذکر است که تقریب استفاده شده در معادله 45 یک تقریب مرتبه اول می‌باشد. می‌توان از روش‌های مختلف دیگری که از تقریب‌های مرتبه بالاتری برای گسسته‌سازی زمانی استفاده می‌نمایند نیز استفاده نمود. تقریب مرتبه دوم کرنک-نیکلسون یکی از تقریب‌های خوب برای گسسته‌سازی زمانی مساله است. در این روش به جای تقریب انتگرال در زمان بعدی با مقدار آن در گام زمانی جدید از میانگین آن در گام زمانی گذشته و آینده استفاده می‌شود (مطابق معادله ذیل):

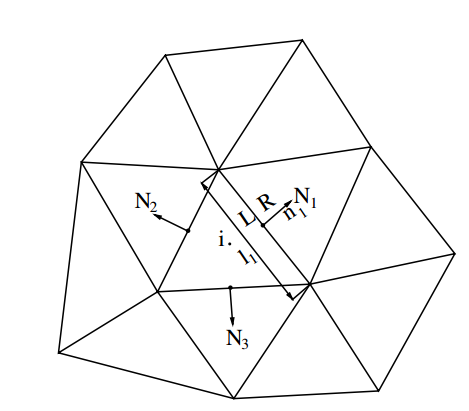


برای افزایش سرعت حل و افزایش پایداری حل از روش SOR استفاده شده‌است. در این حالت جواب مساله در گام زمانی بعدی با اضافه نمودن ضریب زیرتخفیف پایدارتر می‌گردد‌. در این روش جواب مساله در گام زمانی بعدی با فرمول زیر محاسبه می‌گردد.

1. 

که در آن  مقدار متغیر بقایی حاصل از حل عددی است. عدد زیر تخفیف  عددی بین صفر تا 1 است. البته می توان آن را بزرگتر از 1 نیز فرض نمود. ولی این کار کمکی به پایداری ننموده و فقط در مسائل خطی برای افزایش سرعت حل استفاده می‌شود. همچنین شایان به ذکر است که یافتن مقدار مناسب ضریب زیر تخفیف بسیار به مساله و شبکه محاسباتی مربوط است. ولی به عنوان یک قاعده سر انگشتی می بایست برای مش‌های درشت‌تر از ضریب زیر تخفیف کوچک‌تر و برای مش‌های ریزتر از ضریب زیر تخفیف بزرگ‌تر استفاده نمود. همچنین هرچه مساله غیرخطی‌تر باشد اعمال ضریب زیر تخفیف کوچک‌تر مساله را پایدارتر می‌کند. یک تصویر اشتباه از ضریب زیر تخفیف وجود دارد که بیان می‌کند انتخاب ضریب زیر تخفیف کوچکتر سبب کندتر شدن مساله می‌گردد. این تصویر کاملا اشتباه بوده و لازم به تاکید است که برای هر مساله ضریب زیر تخفیف بهینه وجود دارد که نه تنها سبب کندتر شدن مساله نمی گردد بلکه می تواند سرعت حل را به میزان قابل ملاحظه ای افزایش دهد.

همچنین در این روش جهت بدست آوردن حل جريان هاي دائم می‌توان از گام زماني موضعي استفاده نمود كه تا حد زيادي سرعت همگرايي را بالا مي برد اما در شبيه سازي هاي غيردائم استفاده از آنها امكانپذير نمي‌باشد.



در ادامه به منظور پیاده‌سازی لازم است که روش محاسبه شارها مشخص گردیده تا از این طریق روابط 55 و 56 محاسبه شود. در اینجا برای پیاده‌سازی روش LU-SGS از شار رو استفاده می‌شود. در روش رو شار از رابطه ذیل محاسبه می‌گردد[16] .

1. 

که در آن عبارتست از:



1. 

که در آن داریم:

1. 

در رابطه بالا منظور از V، بردار سرعت‌ است.

با جایگذاری رابطه 57 در روابط 55 و 56 خواهیم داشت:

1. ****
2. ****

در رابطه بالا محاسبه ترم  تولید یک تانسور مرتبه سوم می‌نماید. بدست آوردن این تنسور هم بسیار سخت است و هم هزینه محاسباتی بسیار بالایی دارد. لذا در مراجع مختلف از این ترم صرفه نظر نموده‌اند. این تقریب در جریان‌های هموار تقریب خوبی بوده و برای CFLهای تا حدود 1000 نیز در حالت دو بعدی از دقت خوبی برخوردار است. برای اطلاعات بیشتر در این ارتباط می‌توان به مرجع [16] مراجعه نمود.[[20]](#footnote-20) در رابطه بالا با صرف نظر از و قرار دادن مقادیر ویژه در قطر ماتریس  مشتق شار مطابق معادلات ذیل بدست می‌آید:

1. 
2. 

با جایگذاری روابط بالا در معادله 49 داریم:

تا به اینجا تک تک ترم‌های مجهول معادله 65 بدست آمده و در ادامه می‌خواهیم این دستگاه معادلات جبری را که یک ماتریس بسیار بسیار بزرگ اسپارس است با روش‌های بهینه حل نماییم. همانطور که می دانیم برای حل دستگاه معادلات خطی اسپارس روش‌های بسیار متنوعی وجود دارد. ساده‌ترین آن محاسبه معکوس ماتریس ضرایب و ضرب نمودن آن در ماتریس مقادیر معلوم است. ولی این کار به دلیل بسیار بزرگ بودن ماتریس ضرایب امکان پذیر نمی‌باشد. در ادبیات موضوع، برای حل این ماتریس بسیار بزرگ اسپارس دو دسته روش اصلی 1- زیرفضای کرایلوو (Krylov) 2- LU-SGS (Lower Upper symmetry gauss-seidel ) مطرح شده و پیاده سازی شده‌است.

مهمترین مشخصه روش GMRES به عنوان نماینده روش زیر فضای کرایلوو، نرخ همگرایی کوادراچر آن برای گام‌های زمانی بسیار بزرگ است. البته برای دستیابی به این نرخ همگرایی لازم است که دستگاه معادلات ضمنی به دقت ساخته شده و دقیقا معکوس آن گرفته شود. لذا لازم است که خطی‌سازی‌ها با دقت انجام شده و در حلقه‌های تکراری و با استفاده از پریکاندشن‌های مختلف اثر آن به حداقل برسد. در این روش لازم است که ژاکوبین‌ها (عددی و یا تحلیلی) دقیقا محاسبه شده و برای هر وجه یک ماتریس 4×4 در حالت دو بعدی و یک ماتریس 5×5 در حالت سه بعدی محاسبه شوند. در گام بعد لازم است که این ژاکوبین‌ها به درستی در یک ماتریس چیده شوند. شایان به ذکر است که حجم حافظه مورد نیاز برای چیدن ماتریس به قدری بزرگ است که پیاده سازی آن را برای مسایل واقعی بسیار دشوار می‌نماید. به عنوان مثال اگر شبکه محاسباتی مثلثی باشد (مساله 2 بعدی) تعداد درایه مورد نیاز برای سلول‌های غیر مرزی غیر صفر می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

تعداد سلول‌های محاسباتی×(1 (خود سلول) + 3 (تعداد سلول‌های همسایه))×(4×4)

لذا برای هر یک میلیون سلول محاسباتی و در نظر گرفتن متغیر double حجم حافظه برای ذخیره این ماتریس در حالت بهینه کدنویسی 512 مگابایت خواهد شد. برای حل این ماتریس اسپارس بسیار بزرگ، ابتدا می‌توان با یک پری کاندیشنر خوب مانند ILU حل و جواب آن را در روش GMRES قرار داد. در حقیقت می‌توان از روش ILU-GMRES استفاده نمود. محاسبه معکوس این ماتریس حتی با استفاده از پریکاندیشنر خوب بسیار زمان‌بر خواهد بود.

در این گزارش روش دیگری که اولا حجم حافظه مورد نیاز آن بسیار کم است و ثانیا زمان حل آن در هر گام زمانی تقریبا نصف حل رانج کوتا مرتبه 4 می‌باشد، استفاده شده‌است. شایان به ذکر است که این روش کاملا ضمنی بوده و با گسسته سازی ضمنی پیشرو بدون شرط پایدار است. به عنوان مثال در حالت مساله دو بعدی غیر لزج، می توان CFL را تا اعداد یک میلیون نیز افزایش داد. ولی لازم به ذکر است که بزرگ بودن CFL لزوما به معنای حل سریعتر نیست. و می بایست CFL در حدود 1 تا 10 برای مساله انتخاب گردد تا سریعترین سرعت همگرایی را داشته باشیم. توضیحات مربوط به روش LU-SGS در پایین آورده شده است [15-19].

فرض می‌کنیم ماتریسبه ترتیب به سه ماتریس بالا مثلثی، پایین مثلثی و قطری تجزیه می‌کنیم

1. **

با استفاده از جبر ماتریسی رابطه (67) می‌تواند بصورت زیر بازنویسی شود:

1. 

برای سادگی کار از ترم دوم سمت راست رابطه بالا صرف نظر شده [18] و با تعریف به ترتیب به دو دستگاه پیشرو و پسرو می‌شکنیم.

1. 
2. 

در حقیقت با در نظر گرفتن تجزیه 71 و 72 ، معادلات به صورت زیر به دست می‌آیند.

1. 
2. 

که ماتریس قطری با درایه‌های زیر است.

1. 

از آنجا که در معادله (71) تمامی مجهولات برای سطر اول معلوم هستند می‌توان این سطر را حل نمود. با توجه به اینکه در سطر های بعدی نیز به ترتیب متغیرها یا در سطرهای قبلی محاسبه شده اند و یا از گام زمانی قبلی استفاده می‌شوند، لذا با یک جاروب پیشرو می‌توان تمامی معادلات مربوط به متغیر مجازی را حل نمود. به صورت مشابه می توان با جاروب پسرو معادله (60) یا همان متغیرهای بقایی در گام زمانی بعدی را محاسبه نمود. در فایل پاورپوینت پیوست اطلاعات بیشتری در ارتباط با حل پیشرو و پسرو آورده شده است.

شایان به ذکر است که می‌توان از روش‌های دیگری نیز برای تقریب شار برای محاسبه ژاکوبین‌ها استفاده نمود. ولی استفاده از هر روش دلخواه قابلیت پیاده‌سازی به صورت LUSGS را نخواهد داشت. استفاده از تقریب دیگر برای محاسبه ژاکوبین و استفاده از یک تقریب برای محاسبه ترم‌های جابه‌جایی از نظر تئوری امکان‌پذیر بوده و در مراجع مختلف مانند [15] آورده شده است. درحقیقت یکسان بودن تقریب محاسبه شار و ژاکوبین سبب کاهش نسبی زمان حل نسبت به حالت متفاوت می‌گردد. ولی در پاسخ و دقت حل، تقریب استفاده شده در محاسبه ترم‌های جابه‌جایی مهم هستند. این موضوع را به وضوح می‌توان به مقایسه پاسخ‌های روش AUSM و Jameson دید.

در نهایت لزجت آشفتگی در حالت بی بعد شده از معادله زیر بدست می آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. بخش­های زیربرنامه

در این قسمت تمام بخش های زیربرنامه مطابق با شماره گذاری موجود در برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. **تعیین ثوابت موجود در مدل **

در این قسمت، ثوابت موجود در مدل  با توجه به روابط (6 ) و (26) مشخص شده است.

1. **مقداردهی به آرایه­های مربوط به زمان قبل**

در این قسمت، مقادیر بقایی مربوط به زمان قبل جایگذاری تا در روش رانگ کوتا از آنها استفاده گردد.

1. **محاسبه شرایط مرزی**

در این قسمت، کلیه شرایط مرزی با فراخوانی زیربرنامه KeLam\_BC3D تعیین می­گردند.

1. **محاسبه مشتق سرعت در مرکز سلول**

در این قسمت، با فراخوانی زیربرنامه Velocity\_CellGrad3D، مشتق اول مولفه­های سرعت در مرکز همه سلول­ها محاسبه می­شوند.

1. **محاسبه مشتق متغیرهای آشفتگی روی اضلاع سلول­**

در این قسمت، با فراخوانی زیربرنامه KFi\_GradFace3D، مشتق اول متغیرهای آشفتگی  و  روی اضلاع همه سلول­ها محاسبه می­شوند. این زیربرنامه نیز بصورت کلی و برای تمام مدل های آشفتگی دو معادله ای تدوین شده است.

1. **محاسبه بخش جابجایی**

در این قسمت با فراخوانی زیربرنامه KFi\_Con3D، مقدار بخش جابجایی محاسبه می­شود. این بخش به صورت بالادست گسسته­سازی شده است. مانند دو زیربرنامه قبل، این زیربرنامه نیز بصورت کلی و برای تمام مدل های آشفتگی دو معادله ای تدوین شده است.

1. **محاسبه بخش پخش­شوندگی**

در این قسمت با فراخوانی زیربرنامه KeFi\_Dif3D، مقدار بخش پخش­شوندگی محاسبه می­شود. این بخش به صورت مرکزی گسسته­سازی شده است.

1. **محاسبه ترم چشمه**

در این قسمت با فراخوانی زیربرنامه KeLam\_Source، ترم چشمه محاسبه می­شود.

1. **محاسبه مقادیر ویژه و ژاکوبی‌های معادلات توربولانسی**

در این قسمت با فراخوانی زیر برنامه‌ها Calculate\_eigValTurb، IncrementTurb مقادیر ویژه محاسبه می‌شوند.

1. **محاسبه تغییرات متغیرهای بقایی در گام زمانی جدید**

در این قسمت با فراخوانی زیر برنامه LUSGSTurb، تغییرات متغیرهای بقایی در گام زمانی بعدی با استفاده از روش پیشرو به صورت ضمنی حل می‌گردد.

1. **محاسبه متغیرهای بقایی معادلات توربولانسی در گام زمانی بعدی با روش ضمنی**

در این قسمت متغیرهای بقایی معادلات توربولانسی در گام زمانی بعدی با روش ضمنی محاسبه می‌شوند.

1. **محاسبه مقادیر متغیرهای آشفتگی و لزجت تمام سلول­های شبکه**

در یک حلقه تکرار بر روی تمامی سلول­های شبکه، مقادیر متغیرهای آشفتگی و لزجت تمام سلول­ها محاسبه می­گردد.

1. **اطمینان از مثبت بودن متغیرهای آشفتگی**

در صورتی که مقدار هرکدام از متغیرهای آشفتگی منفی شد، مقدار مثبت زمان قبل جایگزین آن می­شود. به این ترتیب اطمینان حاصل می­شود که متغیرهای آشفتگی همواره مثبت هستند.

1. **محاسبه متغیرهای آشفتگی**

در این قسمت با توجه به مقادیر بقایی به دست آمده، مقدار  و  محاسبه می­شوند.

1. **محاسبه ثوابت و توابع موجود در مدل **

ثوابت و توابع ارائه شده در روابط ‏(7) محاسبه می­شوند.

1. **محاسبه لزجت آشفتگی**

لزجت آشفتگی با استفاده از رابطه ‏(59) محاسبه می­شود.

**مراجع**

[1] W. Rodi, Turbulence models and their application in hydraulics, CRC Press, 1993.

[2] H. K. Vesteeg and W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, 2007.

[3] B. E. Launder and D. B. Spalding, "The numerical computation of turbulent flows," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 3, p. 269–289, 1974.

[4] K. A. Hoffmann, S. T. Chiang, Computational Fluid Dynamic Volume 3, Fourth Edition, Wichita, USA,2000.

[5] E. WADE MINER, THOMAS F. SWEAN, JR., ROBERT A. HANDLER AND RICHARD I. LEIGHTON “Evaluation of the Near-Wall k-E Turbulence Model by Comparison with Direct Simulations of Turbulent Channel Flow”,Naval Research Laboratory,1989.

[6] C. K. G. Lam, K. bremhorst, A modified form of the k-Epsilon model for predicting wall turbulence, ASME, 103,456-460,1981.

[7] Chien, J. C, Numerical Analysis of Turbulent Separated Subsonic Diffuser Flow, Symposium on Turbulent Shear Flows, University Park, Pennsylvania, Vol. 1, 18.19-18.25, 1977.

[8] Hassid, S., and Poreh, M., A Turbulent Energy Dissipation Model for Flows With Drag Reduction, ASME JOURNAL OF FLUIDS ENGINEERING, Vol. 100, 107-112, 1978.

[9] Gibson, M. M., Spalding, D. B., and Zinser, W., "Boundary-Layer Calculations Using Hassid-Poreh One-Equation Energy Model, Letters in Heat and Mass Transfer*,* Vol. 5, 73-80, 1978.

[10]ML Shur, MK Strelets, AK Travin, PR Spalart,” [Turbulencemodeling in rotating and curved channels: assessing the Spalart-Shur correction](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=036N-rUAAAAJ&citation_for_view=036N-rUAAAAJ:2osOgNQ5qMEC)”, AIAA journal 38 (5), 784-792, 2000

[11] P. R. Spalart and C. L. Ramsey, "Effective Inflow Conditions for Turbulence Models in Aerodynamic Calculations," *AIAA Journal,* vol. 45, pp. 2544-2553, 2007.

[12] K. Y. Chien, "Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model," *AIAA Journal,* vol. 20, pp. 33-38, 1982.

[13] K. A. Hoffmann and S. T. Chiang, Computational Fluid Dynamics Vol 3, 2000.

[14] D. A. Anderson, J. C. Tannehill and R. H. Pletcher, Computational fluid dynamics and heat transfer, Washington: Hemisphere, 1984.

[15] Enrico Rinaldi et al. “Exact Jacobians for implicit Navier-Stokes simulation of equilibrium real gas flows”, Journal of computational physics 270 (2014) 459-477

[16] Amir Nejat “A higher-order accurate unstructured finite-volume Newton-Krylow algorithm for inviscid compressible flows” PhD thesis University of British Columbia 2007

[17] R. F. Chen and Z. J. Wang “Fast, block lower upper symmetry Gouss-Seidel scheme for arbitrary grids” AIAA journal Vol.38, No 12, Decenber 2000

[18] Dimitry Sharov and Kazuhiro Nakahashi “Reordering of 3-D hybrid unstructured grids for vectorized LU-SGS Navier-Stokes computations” AIAA journal, 97 2102

[19] Christopher Cox et al. “A high-order solver for unsteady incompressible Navier-Stokes equations using the flux reconstruction method on unstructured grids with implicit dual time stepping” Journal of computational physics 314 (2016) 414-435

1. *Production of Turbulent Kinetic Energy* [↑](#footnote-ref-1)
2. *Dissipation of Turbulent Kinetic Energy* [↑](#footnote-ref-2)
3. *Launder* [↑](#footnote-ref-3)
4. *Spalding* [↑](#footnote-ref-4)
5. *Vortical Flows* [↑](#footnote-ref-5)
6. *Separation* [↑](#footnote-ref-6)
7. *Large Adverse Pressure Gradients* [↑](#footnote-ref-7)
8. *Curved Boundary Layer* [↑](#footnote-ref-8)
9. *Damping Function* [↑](#footnote-ref-9)
10. *Ramsey* [↑](#footnote-ref-10)
11. *Spalart* [↑](#footnote-ref-11)
12. *Internal Flow* [↑](#footnote-ref-12)
13. *External Flow* [↑](#footnote-ref-13)
14. *Convective Term* [↑](#footnote-ref-14)
15. *Diffusion Term* [↑](#footnote-ref-15)
16. *Source Term* [↑](#footnote-ref-16)
17. *Guass Theorem* [↑](#footnote-ref-17)
18. *Ordinary Differential Equation* [↑](#footnote-ref-18)
19. پایداری به معنای دقت در جواب نیست. [↑](#footnote-ref-19)
20. این تقریب ارتباطی به روش LU-SGS نداشته و در اغلب مراجع با حلگر GMRES که از تقریب رو برای محاسبه شار استفاده نموده‌اند بهره گرفته شده‌است. [↑](#footnote-ref-20)